E.N.S. SEVRES ET ULM 1980

## Groupe C

# MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

*Les parties* II *et* III *sont indépendantes*

### Préliminaire

Considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $n$ variables aléatoires $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ discrètes (c'est-à-dire prenant un nombre fini de valeurs dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs).

On admettra (sans chercher à le démontrer) que, si les variables $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ sont indépendantes, pour toutes fonctions $g$ de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$ et $\hat{g}$ de $\mathbb{R}^{n-k}$ dans $\mathbb{R}$, bornées (où $k$ est un entier strictement inférieur à $n$),

$$(1)\quad E[g(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\, \hat{g}(\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n)] = E[g(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)]\, E[\hat{g}(\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n)].$$

Remarque : Soit $m$ un élément de $\mathbb{Z}$. Nous désignons par $1_{\{m\}}$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $1_{\{m\}}(x) = 1$ si $x = m$, $1_{\{m\}}(x) = 0$ si $x \neq m$.

Plus généralement, si $m_1, m_2, \ldots, m_n$ désignent $n$ éléments de $\mathbb{Z}$, la fonction $g$ de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} 1_{\{m_i\}}(x_i),$$ vaut 1 au point $\{m_1, \ldots, m_k\}$, 0 sinon.



De même la fonction

$$\hat{g}(x_{k+1}, \ldots, x_n) = \prod_{i=k+1}^{n} 1_{\{m_i\}}(x_i)$$ vaut 1 au point $\{m_{k+1}, \ldots, m_n\}$, 0 sinon.

Par définition de l'espérance des variables aléatoires, nous voyons que

$$E[g(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)] = P(\varphi_1 = m_1, \ldots, \varphi_k = m_k)$$

et la relation (1) entraine alors aisément que pour tout $k$

$$P(\varphi_1 = m_1, \ldots, \varphi_n = m_n) = P(\varphi_1 = m_1, \ldots, \varphi_k = m_k)\; P(\varphi_{k+1} = m_{k+1}, \ldots, \varphi_n = m_n).$$

---

On considère un chemin aléatoire dans le plan, dont les étapes sont des points de coordonnées entières, positives ou négatives. On suppose que la probabilité de transition en une étape d'un sommet à l'un de ses quatre voisins est égale à 1/4.

On modélise ce phénomène aléatoire de la façon suivante :

On construit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et deux suites de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(B_n)_{n \geq 1}$, ayant les propriétés suivantes :

i. Pour tout entier, la famille des $n$ couples $(A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ est une famille de couples indépendants, au sens où : pour tous $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)$ de $\mathbb{Z}^2$,

$$P[(A_1, B_1) = (\alpha_1, \beta_1), \ldots, (A_n, B_n) = (\alpha_n, \beta_n)] = \prod_{k=1}^{n} P[(A_k, B_k) = (\alpha_k, \beta_k)].$$

ii. Chacun des couples $(A_n, B_n)$ $(n \geqslant 1)$ a même loi que le couple $(A_1, B_1)$, considéré comme la première étape d'un chemin aléatoire issu de $(0, 0)$, c'est-à-dire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$P[(A_n, B_n) = (1, 0)] = P[(A_n, B_n) = (0, 1)] = P[(A_n, B_n) = (-1, 0)] = P[(A_n, B_n) = (0, -1)] = \frac{1}{4}.$$

Le sommet de la $n$-*ième* étape du chemin est repéré par le point $M_n$ de coordonnées aléatoires $X_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$, $Y_n = \sum_{i=1}^{n} B_i$.

## Première partie

1° *a.* Étudier la loi des variables aléatoires $A_1$ et $B_1$.

Ces variables sont-elles indépendantes?

*b.* On pose $U_1 = A_1 + B_1$, et $V_1 = A_1 - B_1$.

Montrer que les variables $U_1$ et $V_1$ sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et indépendantes.

2° Plus généralement, on pose $U_n = A_n + B_n$, $V_n = A_n - B_n$.

*a.* Montrer que les $2n$ variables $(U_1, V_1, U_2, V_2, \ldots, U_n, V_n)$ sont indépendantes.

En déduire que les variables $R_n = X_n + Y_n$ et $S_n = X_n - Y_n$ sont indépendantes.

*b.* Quelles sont les lois de $R_n$ et de $S_n$?

En déduire $P[(X_n, Y_n) = (a, b)]$ si $(a, b)$ appartient à $\mathbb{Z}^2$.

3° On définit par récurrence une suite de variables aléatoires par :

$T_n = \sqrt{1-\rho^2}\, V_n + \rho\, T_{n-1}$, où $\rho$ est un réel de module strictement inférieur à 1, avec comme condition initiale $T_1 = V_1$.

Montrer que, $\operatorname{cov}(T_i, T_j)$, terme général de la matrice de covariance du vecteur $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ est égale à $\rho^{|i-j|}$.

4° On suppose maintenant la condition initiale égale à $\hat{T}_1 = \sqrt{1-\rho^2}\, V_1$, et $\hat{T}_n = \sqrt{1-\rho^2}\, V_n + \rho\, \hat{T}_{n-1}$.

*a.* Comparer $T_n$ et $\hat{T}_n$.

*b.* On suppose maintenant et dans les questions *c* et *d* que $\rho = \frac{1}{2}$.

Montrer, par récurrence, que les valeurs prises par $\frac{\hat{T}_n}{\sqrt{3}}$ sont toutes de la forme

$$\left(-1 + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{k}{2^{n-1}},$$

où $k$ est un entier compris entre 0 et $2^n - 1$ $(0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1)$.



*c.* i. Montrer, que si $t$ appartient à l'intervalle $\left[-1 + \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^n}\right]$,

$$P(\hat{T}_n \leqslant t\sqrt{3}) = \frac{1}{2^n}\left(1 + \left[2^{n-1}\left(t + 1 - \frac{1}{2^n}\right)\right]\right)$$

où $[x]$ désigne, pour tout nombre réel $x$ positif, le plus grand entier qui minore $x$.

ii. Calculer $P(\hat{T}_n \leqslant t\sqrt{3})$ si $t < -1 + \frac{1}{2^n}$ ou $t > 1 - \frac{1}{2^n}$.

iii. Calculer la limite de $P(\hat{T}_n \leqslant t\sqrt{3})$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

*d.* Montrer, plus généralement, que si $f$ est une fonction continue et bornée sur l'intervalle $]-1, +1[$ :

$$E\left[f\left(\frac{\hat{T}_n}{\sqrt{3}}\right)\right] \text{ converge vers } \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(t)\, dt.$$

## Deuxième partie

On désigne par $v(\omega)$ le premier instant où le chemin aléatoire coupe la première bissectrice de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que

$$v(\omega) = \inf\{n > 0 ;\ X_n(\omega) = Y_n(\omega)\}$$

si $\omega$ appartient à l'ensemble $\Omega_v = \{\omega ;\ \exists\, n > 0\ X_n(\omega) = Y_n(\omega)\}$, et si $\omega$ n'appartient pas à $\Omega_v$, on pose par convention $v(\omega) = +\infty$.

Lorsque $\omega$ appartient à $\Omega_v$, on désigne le premier point d'intersection du chemin aléatoire avec la première bissectrice par $(X_{v(\omega)}(\omega), Y_{v(\omega)}(\omega))$ (avec bien sûr $X_{v(\omega)}(\omega) = Y_{v(\omega)}(\omega)$).

On pourra noter que, si $p$ est un entier positif et $j$ un élément de $\mathbb{Z}$, l'événement

$\{\omega ;\ v(\omega) = p$ et $X_{v(\omega)}(\omega) = j\}$ est égal à l'événement

$\{\omega ;\ S_1(\omega) \neq 0,\ S_2(\omega) \neq 0, \ldots, S_{p-1}(\omega) \neq 0,\ S_p(\omega) = 0,\ R_p(\omega) = 2j\}$.

1° On admet que si $|s| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} P(v = n)\, s^n = g(s) = 1 - \sqrt{1 - s^2}$

et que cette égalité est encore valable si $s = 1$.

*a.* Montrer que $P(\Omega_v) = 1$.

*b.* Calculer $E(\cos(t R_n))$.

*c.* En déduire que la fonction définie, pour $\theta$ réel, par

$$\varphi(\theta) = E(\cos(\theta X_v)) \text{ est égale à } 1 - \left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.$$

2° *a.* Montrer que, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, $\left[\varphi\left(\frac{\theta}{n}\right)\right]^n$ converge vers $e^{-\frac{|\theta|}{2}}$.

*b.* Calculer la fonction $I(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t} e^{-\frac{|\theta|}{2}} \cos(\theta x)\, d\theta$ pour $x$ réel et $t$ positif, et

Montrer que $I(x, t)$ converge, si $t$ tend vers $+\infty$, vers $\frac{2}{\pi}\frac{1}{1 + 4x^2}$.

*c.* Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{1}{1 + 4x^2}\, dx$.

## Troisième partie

Sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère maintenant $n$ variables aléatoires réelles $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ que nous supposons d'*espérance nulle* et de *variance* 1.

On désigne par $K_p$ la matrice de covariance du vecteur $(C_1, C_2, \ldots, C_p)$ (c'est-à-dire la matrice de terme général $\operatorname{cov}(C_i, C_j)$ si $i, j = 1, \ldots, p$) et on suppose que pour tout $p$, variant de 1 à $n$, $K_p$ est inversible.

On fait choix d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ et on désigne par

$F_p$ le sous-espace de dimension $p$ engendré par $(e_1, \ldots, e_p)$,

$E_p$ le sous-espace de dimension 1 engendré par $e_p$.



1° Montrer que, pour chaque $i = 1, \ldots, n$, il existe une application linéaire et une seule $u^i$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $u^i(e_j) = \operatorname{cov}(C_i, C_j)$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

2° *a.* Montrer qu'à tout vecteur $x$ de $\mathbb{R}^n$, on peut associer un unique élément

$$y_p(x) \quad \text{de } F_p \quad \text{tel que}$$

$$u^i(x) = u^i(y_p(x)),\ i = 1, \ldots, p.$$

(On pourra décrire le système linéaire auquel les coordonnées de $y_p(x)$ satisfont nécessairement, mais on ne cherchera pas à le résoudre.)

*b.* Calculer $y_1(e_j)$.

3° Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $y_p(e_k)$ appartienne à $E_p$ pour tout $k > p$ et tout $p$, est que :

$\operatorname{cov}(C_i, C_k) = \operatorname{cov}(C_i, C_j)\operatorname{cov}(C_j, C_k)$ si $i < j < k$.

4° On suppose que $\operatorname{cov}(C_i, C_j) = \rho^{|j-i|}$, où $\rho$ est un réel tel que $|\rho| < 1$.

Montrer que le système de vecteurs

$$f_1 = e_1,\ f_2 = \frac{e_2 - \rho e_1}{\sqrt{1 - \rho^2}},\ \ldots,\ f_n = \frac{e_n - \rho e_{n-1}}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

est une base de $\mathbb{R}^n$, qui possède les propriétés suivantes :

pour tout $k$, $f_k$ appartient à $F_k$ et $u^i(f_k) = 0$ si $i < k$,

et $u^k(f_k) = \sqrt{1 - \rho^2}$ :

5° On désigne par A la matrice de changement de base.

Calculer ses valeurs propres, ses vecteurs propres, la matrice $A^{-1}$.

6° On pose, si C est le vecteur colonne de composantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, $D = A^{-1} C$.

D est donc un vecteur colonne, dont les composantes $D_1, D_2, \ldots, D_n$ sont des combinaisons linéaires des composantes de C.

Montrer que la matrice de covariance de $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ est l'identité et que pour tout $k$, $C_{k+1} = \sqrt{1 - \rho^2}\, D_{k+1} + \rho C_k$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail